

DOI: 10.16285/j.rsm.2023.0409

有自由面的裂隙网络稳定渗流试验与数值分析

张 旭^{1,2}, 盛建龙^{1,2}, 叶祖洋^{1,2}, 周 新^{1,2}

(1. 武汉科技大学 资源与环境工程学院, 湖北 武汉 430081; 2. 冶金矿产资源高效利用与造块湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430081)

摘 要: 为探究裂隙网络含自由面的稳定渗流特性, 设计可视化的二维裂隙网络渗流试验装置, 通过调节裂隙网络模型的上、下游水头开展一系列裂隙网络渗流试验, 依次记录自由面水头高度和渗流流量大小; 同时基于有限元软件 COMSOL Multiphysics 中的 Darcy 接口, 建立等比例二维裂隙网络数值模型, 复现试验工况并与试验结果对比分析。对比发现试验结果与模拟结果基本吻合, 这验证了试验结果的有效性以及数值模拟的准确性。研究结果表明: 影响自由面变化的主要因素为上、下游水头高度及二者高度差; 渗流水力梯度越大, 自由面位置的下降越快; 渗流水力梯度相同的水力条件, 上、下游水头越高, 形成的自由面水头越高, 自由面降落曲线也越陡。其中, 若上、下游水头高度不处于近似的水平, 二者对于自由面位置的影响存在较大差异。自由面变化的基本规律符合 Dupuit 公式的表述。稳定渗流的水力梯度与平均流量仅在流量较小时符合线性相关, 随着水力梯度的增加, 二者关系呈现明显的非线性。

关 键 词: 稳定渗流; 裂隙网络; 自由面; 透水层; 渗流水力梯度; 水头

中图分类号: TU458

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2024) 03-0878-07

Experimental and numerical analysis of steady seepage in fractured network with free surface

ZHANG Xu^{1,2}, SHENG Jian-long^{1,2}, YE Zu-yang^{1,2}, ZHOU Xin^{1,2}

(1. College of Resources and Environmental Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430081, China;

2. Hubei Key Laboratory for Efficient Utilization and Agglomeration of Metallurgic Mineral Resources, Wuhan, Hubei 430081, China)

Abstract: This study focuses on investigating the steady seepage characteristics of fracture network with free surface. A visual two-dimensional fracture network seepage test device was designed to conduct a series of fracture network seepage tests by adjusting the upstream and downstream heads of the fracture network model, and recording the height of free surface head and seepage flow. Additionally, a two-dimensional fracture network numerical model with equal proportions was established using the Darcy interface of the finite element software COMSOL Multiphysics. The test conditions were reproduced in the numerical simulation and compared with the test results. The findings demonstrate that the test results are basically consistent with the simulation results, which verifies the effectiveness of the test results and the accuracy of the numerical simulation. The results show that the main factors affecting the change of free surface are the height of upstream and downstream heads and the height difference between them. A larger seepage hydraulic gradient leads to a faster drop in the position of the free surface. Under the same hydraulic condition of seepage hydraulic gradient, higher the upstream and downstream water heads result in higher the free surface water heads and steeper falling curve of free surface. Notably, if the upstream and downstream water head heights are not at similar levels, their influence on the position of the free surface differs greatly. The basic laws of free surface change align with Dupuit formula. The hydraulic gradient of steady seepage is linearly correlated with the average flow rate only when the flow rate is small, while with increasing hydraulic gradient, the relationship becomes noticeably nonlinear.

Keywords: steady seepage; fracture network; free surface; permeable layer; seepage hydraulic gradient; water head

1 引 言

受构造应力、风化作用等因素的影响, 天然岩

体内部存在有大量裂隙, 其空间网络构成了地下水的主要赋存场所和运移通道^[1-3]。裂隙网络渗流与工程岩体的变形破坏密切相关, 例如 1959 年位于法国

收稿日期: 2023-04-03

录用日期: 2023-06-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.42077243, No.42072300)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (42077243, 42072300).

第一作者简介: 张旭, 男, 1999 年生, 硕士研究生, 主要从事岩体裂隙渗流研究。E-mail: JSProv_DTZX@163.com

通讯作者: 叶祖洋, 男, 1988 年生, 博士, 教授, 主要从事裂隙岩体渗流及多场耦合机制研究。E-mail: yezuyang@wust.edu.cn

的 Malpasset 拱坝溃决以及 1963 年意大利 Vajont 水库库岸滑坡两起重大岩石失稳事故, 高压水渗入基岩是导致破坏的主要原因。

裂隙网络渗流研究方法包括理论分析、试验研究和数值模拟。此前, 众多学者已经进行了相关的研究: Wittke^[4]根据节点流量守恒、回路压力守恒等方程提出了计算二维裂隙网络水流量、流速和水压的线索法; 陈建生等^[5]应用同位素示踪探测, 建立二维裂隙网络的渗流模型, 计算裂隙网络中任意交点的水头、等效水力隙宽、渗透系数、水力梯度等参数; 汪金元等^[6]建立了有降雨入渗下的三维裂隙网络饱和-非饱和渗流数学模型, 并分别从渗流时自由水面及降雨下非饱和区渗透荷载分布规律两方面开展了试验验证分析; 王恩志等^[7]建立了一种三维裂隙网络渗流数值模型, 并利用混凝土试块的堆砌模拟三维正交裂隙网络结构, 设定不同的边界水位以及降雨入渗条件进行了裂隙渗流的试验, 验证了数值模型; Jarafi 等^[8]基于二维裂隙网络研究了裂隙密度、长度、倾角等对渗流特性的影响; 张奇华等^[9]通过单纯形积分计算方案, 建立三维裂隙网络渗流有限元计算方法; Ye 等^[10]基于 DFN 模型, 提出了一种系统的二维变饱和裂隙岩体渗流分析的有限元算法, 并开发了相应的数值程序; 王亚维^[11]堆砌不同尺寸、形状の木块材料模拟三维裂隙网络, 对不同裂隙结构含水层开展水力特性试验。

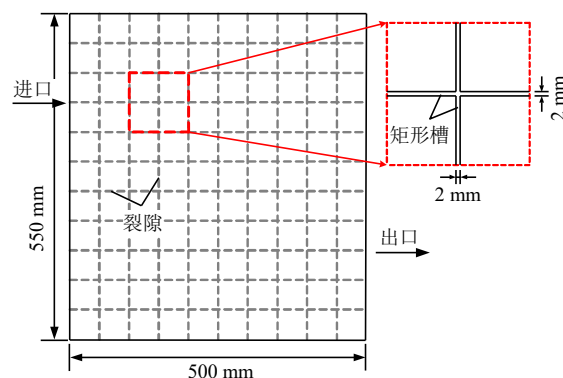
到目前为止, 数值模拟是裂隙网络渗流最主流的研究方法, 原因是岩体裂隙分布的复杂性使得理论分析很难得到解析解, 而野外环境的恶劣和模型试验的高成本又导致较少有研究采用试验验证数值模拟结果。然而, 数值模拟采用的裂隙网络渗流模型均是基于立方定律^[12], 仅凭模拟得出的结论并不一定真实可靠。

因此, 数值模拟并不能完全取代试验研究, 将试验与数值模拟相结合进行论证能够获得更为科学可靠的结论。本文的研究目的在于: 通过二维裂隙网络的稳定渗流试验, 同时结合有限元软件 COMSOL Multiphysics, 建立等比例二维数值模型模拟试验工况, 对比研究二维裂隙网络稳定渗流自由面的特性, 最终总结出自由面变化的基本规律及其影响因素。此外, 由于以往求解有自由面渗流问题的难点在于自由面位置是未知的^[13], 而本文在试验数据的基础上进行求解, 效率会大大提高, 研究结果可为裂隙网络自由面的计算提供参考。

2 裂隙网络渗流试验

如图 1 所示, 裂隙网络渗流试验系统由上游水

箱、裂隙网络试件、下游水箱以及蓄水箱 4 部分组成。为实现裂隙网络渗流试验的可视化, 通过在透明有机玻璃上雕刻相互垂直的矩形槽, 制作正交裂隙网络刻画板, 将其与一块同样尺寸的有机玻璃平板粘合, 构成裂隙网络可视化实体模型。



(a) 裂隙网络试件示意图



(b) 试验装置实体图

图 1 裂隙网络渗流试验系统

Fig.1 Seepage testing system for fracture network

箱正交裂隙网络试件设计长度为 500 mm, 高度为 550 mm, 宽度为 20 mm, 其中包含横向裂隙 10 条, 纵向裂隙 9 条, 各裂隙间距均为 48 mm, 矩形槽宽度为 2 mm, 雕刻深度 (即裂隙开度) 为 2 mm。裂隙试件与上、下游水箱衔接处采用强力胶密封, 确保在高压下不会发生渗漏。

上、下游水箱均由透明有机玻璃制成, 同时布置溢流板, 溢流板不同高程位置留有溢流孔以调节上下游水位; 可通过上、下游水箱和裂隙网络试件表面贴标尺, 快速读取水头高程。上游水箱中特定设有整流栅起到稳流与消能的作用, 以溢流板为分界, 在左侧箱体底部设排水口, 右侧底部设进水口, 下游水箱左右两侧箱体底部均设有排水口。

试验采用水流循环系统, 蓄水箱水体通过水泵

驱动向上流入上游水箱, 然后沿着裂隙网络渗入下游水箱, 再经过下游排水口汇入蓄水箱。本试验通过改变上、下游水箱中溢流孔高程来调节上、下游水头和渗流水力梯度。为了清晰地观测到自由面各水头高度的变化, 采用红色染色水。试验进行时, 首先确保整个试验系统中水流达到稳定, 并排除裂隙网络中的气泡, 然后依次读取上、下游以及自由面水头高度值, 同时在下游出水口测量稳定状态下定时间隔的出水量, 使用体积法计算出流量。

3 裂隙网络渗流数值模拟

如图 2 所示, 低流速条件下裂隙网络渗流一般为线性 Darcy 流, 可采用 COMSOL 软件的 Darcy 方程模块进行求解, 参数取值如表 1 所示。表中, H_p 为压力水头。

表 1 生成数值模型的基本参数
Table 1 Basic parameters used to generate numerical model

属性	流体密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	流体动力黏度 $\mu/(\text{Pa} \cdot \text{s})$	饱和渗透系数 $K_{\text{sat}}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	传导率 R_b/s^{-1}	
				$H_p < 0$	$H_p \geq 0$
值	1×10^3	1.12×10^{-3}	2.92	0	5.84

裂隙网络饱和渗透系数 K_{sat} 采用下式计算^[13]:

$$K_{\text{sat}} = \frac{b^2 \rho g}{12\mu} \quad (1)$$

式中: b 为裂隙开度; g 为重力加速度, 取 9.8 m/s^2 。

自由面渗流问题存在自由面边界和溢出边界^[14], 其中溢出边界属于混合边界。渗流计算求解中, 渗流自由面位置 (包括出逸点) 是未知的。如图 2 所示, 将自由面的求解归纳为饱和-非饱和渗流^[14-15]问题, 其中饱和区为正压, 取饱和渗透系数; 非饱和区为负压, 渗透系数趋近于 0, 几乎不过流; 饱和区与非饱和区的交界处压力为 0, 即自由面。

COMSOL 软件的透水层^[13-14]边界条件, 能够在 Dirichlet 边界与 Neumann 边界^[16-17]之间灵活转变, 因而可模拟溢出边界。该边界条件的方程式为

$$-\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u} = \rho R_b \left[\frac{(p_b - p)}{\rho g} + (D_b - D) \right] \quad (2)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为边界面上的法向矢量; $\mathbf{u}$ 为通过微分单元体单位面积上流量的变化量; p_b 为透水层外部压力; p 为渗流场内渗透水压力; D_b 为透水层外部高程; D 为透水层内部高程。

边界上压力水头 $H_p \geq 0$ 且 $p_b < p$ 的部分即 Dirichlet 边界, $H_p < 0$ 的部分即 Neumann 边界。只

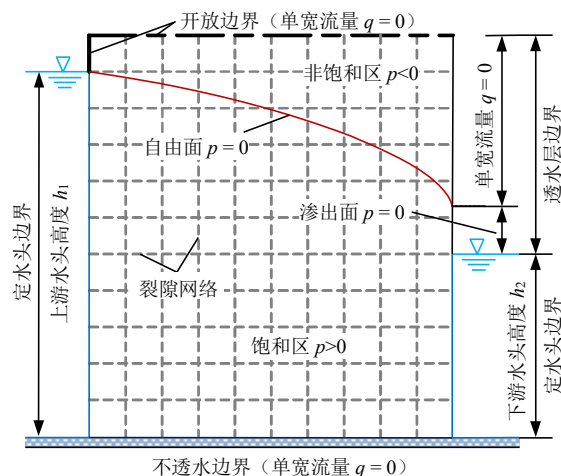


图 2 二维正交裂隙网络数值模型

Fig.2 Numerical model of two-dimensional orthogonal fracture network

需为 R_b 设置不同的值, 即可实现对不同边界条件的模拟。当 $H_p < 0$ 时, $R_b = 0$; 当 $H_p \geq 0$ 时, 考虑到结果的准确性和收敛性^[18], 传导率 R_b 为

$$R_b = \frac{K_{\text{sat}}}{L} \quad (3)$$

式中: L 为透水层厚度, 本文取 0.5 m 。

模型边界条件设定如下: 上游水位之上以及顶端的裂隙口取为法向流速为 0 的入口边界, 下游水位之上的裂隙口取为透水层边界, 水位以下的入水口、出水口取为定水头边界, 其余边界均不透水。

其中, 透水层边界的设置参照试验结果, 预估出自由面末端的大致位置, 将自由面末端和下游水位之间的透水层边界取 $R_b = 5.84$, 其余透水层边界取 $R_b = 0$ 。

4 结果分析

4.1 试验与模拟结果对比

图 3 给出了 3 种水力条件稳定渗流状态的试验和数值模拟结果对比, 其中图 3(a) 红线代表自由面, 由 9 个观测点的自由面位置依次连接而成; 图 3(b) 中压力水头等值线上标记为 0 的线代表自由面降落曲线。

为方便起见, 本文将水力条件“上游水头 $h_1 = 35.50 \text{ cm}$ 、下游水头 $h_2 = 25.50 \text{ cm}$ ”简记为“35.50-25.50”(水头值的小数部分是由于水体表面张力导致的上、下游水头值出现的波动); 将裂隙网络中任一点距其左端起始横断面的水平距离记作“ x ”。

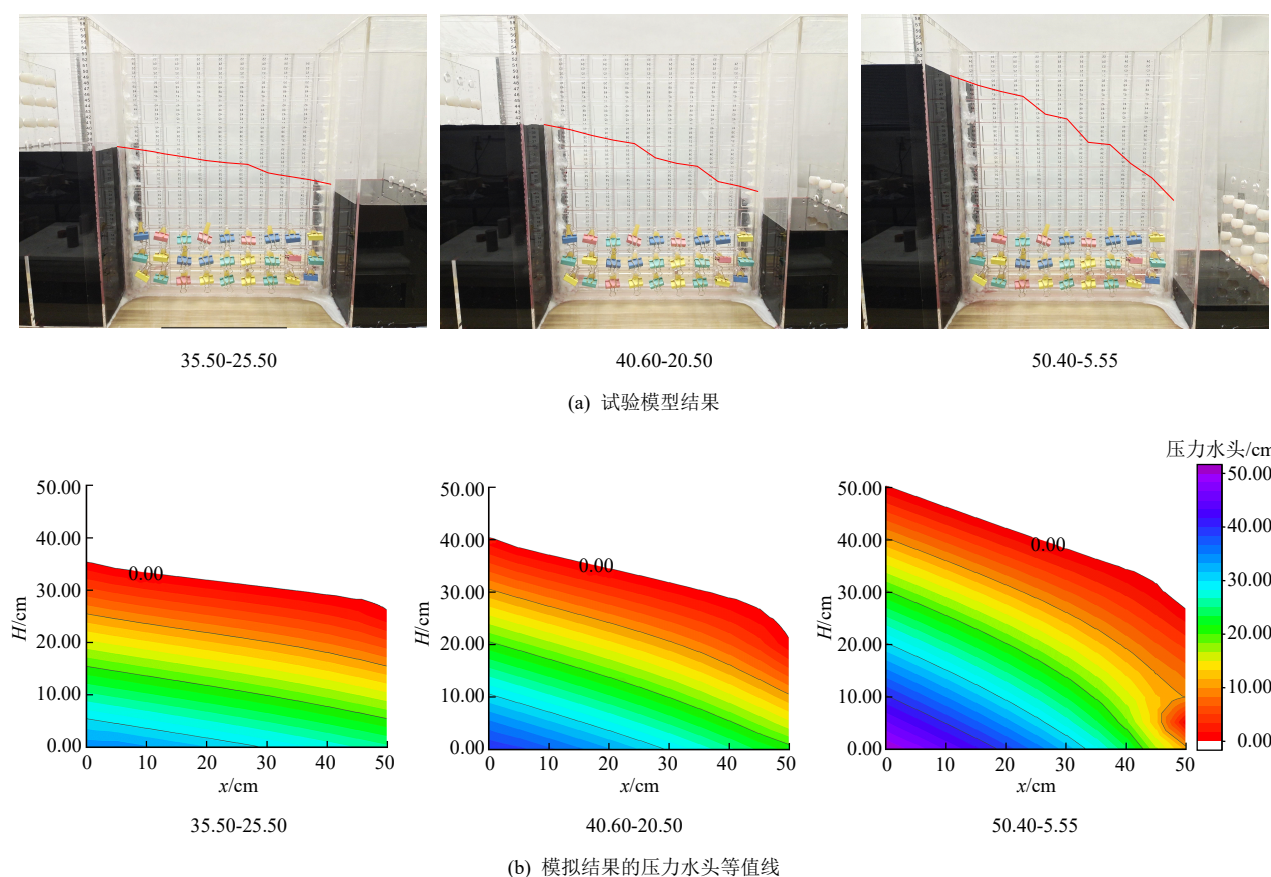


图3 试验和数值模拟结果对比

Fig.3 Comparison between experimental and numerical simulation results

如图3所示,不同水力梯度下,试验数据与模拟结果基本上都较为吻合。为定量描述二者自由面水头结果的差别,本文定义其相对误差率 δ 为

$$\delta = \frac{|H_N - H_E|}{H_E} \times 100\% \quad (4)$$

式中: H_N 为自由面水头高度的数值解; H_E 为稳定渗流试验中测得的自由面水头高度。

误差计算结果表明,试验与模拟结果的自由面水头相对误差率区间为0%~14.95%,误差率平均值为5.02%,验证了本文试验结果的有效性以及数值模拟的准确性。

分析误差发现,上游水头越低,相对误差率越大。由于液体表面张力的存在,自由面表层的水分子与裂隙通道内壁相互作用会产生毛细现象。当温度为20℃时,毛细高度 h^* 经验公式^[19]取:

$$h^* = 29.8 / d \quad (5)$$

式中: d 为毛细管内径(mm)。

经验公式计算出的毛细高度为1.49 cm,与试验和模拟结果间的差值接近。

渗流水力梯度较小,相应的渗流速度也偏小,

此时水的内聚力不足以将水与裂隙通道内壁的附着力抵消,就会表现为上游水头越低,毛细作用效果越显著,甚至导致自由面水头高于上游水头。当上游水头逐渐增高,渗流的水体内部蕴含能量增大,对水头的影响远大于表面张力,一般可以将毛细管力的作用忽略不计。

4.2 对自由面变化的敏感性分析

4.2.1 上、下游水头高度差值的影响

如图3所示,上、下游水头高度差值,也即渗流水力梯度越大,则自由面降落趋势越快;相反,若渗流水力梯度较小,自由面降落曲线也较为平缓。

结合试验和模拟结果,绘制 $J-\Delta h$ 关系曲线(见图4),其中, Δh 为自由面降落高程, J 为渗流水力梯度。

对图4数据以不同的下游水头分组进行拟合,结果表明渗流水力梯度与自由面降落高程基本成正比相关,渗流水力梯度越大,自由面位置的下降越快。当上、下游的水位差增大,导致其相互间的水压力差值也随之增大,裂隙网络中的水流在重力的作用下,所含的势能有着较强的释放趋势,因此自由面位置会迅速变化。图中,T表示试验结果,N表示数值结果。

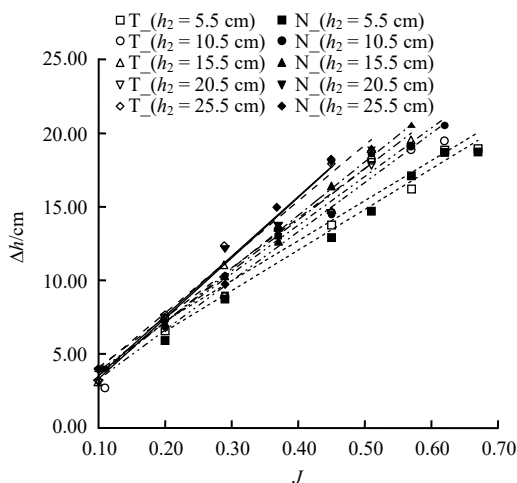
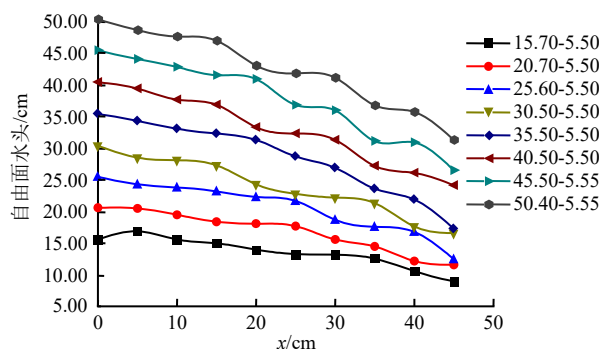


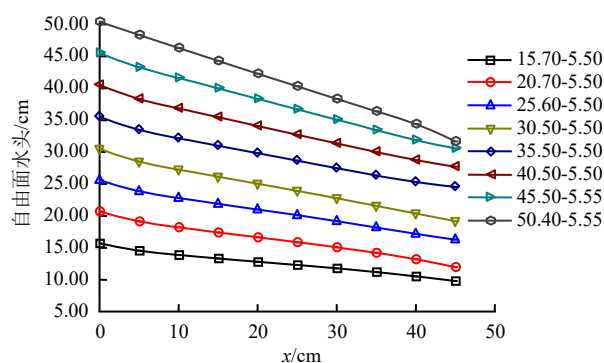
图4 渗流水力梯度和自由面降落高程的关系曲线
Fig.4 Relationships between seepage hydraulic gradient and free surface falling elevation

4.2.2 上、下游水头高度的影响

为验证上、下游水头高度对自由面变化的影响,采用单一变量法对比研究试验和数值模拟结果的自由面降落曲线(见图5、6):第1组恒定下游水位为5.5 cm,仅调节上游水头;第2、3组分别选定上游水头为30.5、50.4 cm,调节下游水头。



(a) 试验结果

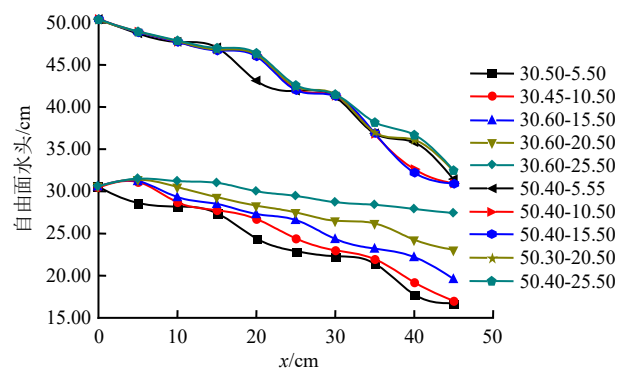


(b) 模拟结果

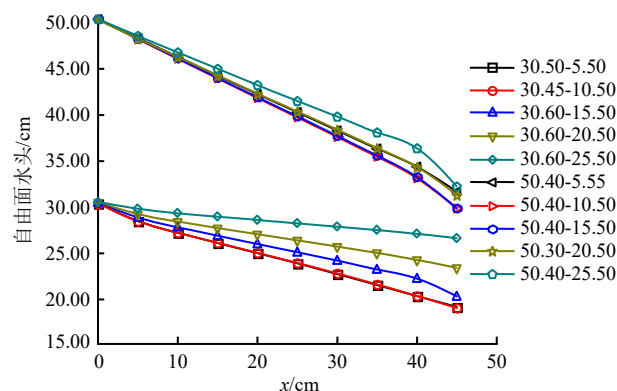
图5 仅调节上游水头,自由面降落曲线的比较
Fig.5 Comparisons of free surface falling curves only when the upstream head is adjusted

如图5所示,调节上游水头可导致自由面降落曲线整体产生较大位移,且上游水头越大的水力条件,其自由面降落曲线越陡,这再次验证了渗流水力梯度与自由面变化的线性相关。

从图6可见,上游水头为50.4 cm时,各水力条件的自由面降落曲线近乎重合,下游水头的变动对于自由面变化的影响不明显。但上游水头调节至30.5 cm时,各水力条件的自由面降落曲线产生明显差异。此外也可看出,拥有相同渗流水力梯度的水力条件,上、下游水头越高的,所形成的自由面降落曲线越陡。



(a) 试验结果



(b) 模拟结果

图6 仅调节下游水头,自由面降落曲线的比较
Fig.6 Comparisons of free surface falling curves only when the downstream head is adjusted

结合 Dupuit 公式^[20]分析图5和图6所呈现的现象,依据 Dupuit 假设,可推导出二维裂隙网络任意横断面上的单宽流量 q 为

$$q = K \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} \quad (6)$$

式中: K 为渗透系数; l 为上、下游之间的距离,即二维裂隙网络的长度。

自由面降落曲线方程:

$$h^2 = h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_2^2}{l} x \quad (7)$$

式中: h 为距裂隙网络左端起始横断面 x 处的自由面高度。

如式(6)所示, 渗流水力梯度 J 相同时, 上、下游水头更高的水力条件形成的渗流量更大, 显然其自由面水头也更高。式(7)则阐明, 在 h_1 远大于 h_2 时, 来自 h_2 的变化对整体自由面高度 h 的影响极小。结合图6的结论, $h_1 = 50.4$ cm 时, 上游水头是下游水头的数倍, 因此所有的自由面降落曲线都近乎重合; 而 $h_1 = 30.5$ cm 时的 h_1 、 h_2 处于近似的水平, 自由面位置又会出现显著差异。

4.3 J 和 $\bar{Q}$ 的关系

不同水力条件下渗流水力梯度 J 和平均流量 $\bar{Q}$ 关系曲线如图7所示。从图中可以看出, J — $\bar{Q}$ 关系仅在流量较小的范围内符合线性相关, 随着裂隙网络渗流水力梯度的不断增加, 渗流量增长趋势变大, 渗流水力梯度与平均流量逐渐偏离线性关系, 呈现出明显的非线性特性。图中, F 表示拟合结果。

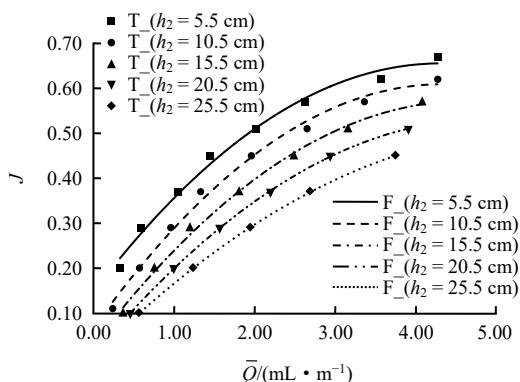


图7 水力梯度与平均流量的关系曲线

Fig.7 Relation curves of hydraulic gradient and average flow rate

将图7中全部的水力条件以不同的下游水头值 h_2 分组进行拟合发现, 渗流水力梯度和平均流量具有二次函数关系, 且具有较高的吻合度。其二次函数关系式为

$$J = a + b\bar{Q} + c\bar{Q}^2 \quad (8)$$

式中: a 、 b 、 c 均为常数, 具体数值见表2。

表2 拟合方程系数表

Table 2 Coefficient table of fitting equation

工况	a	b	c	决定系数 R^2
$h_2 = 5.5$ cm	0.146 83	0.236 32	-0.027 46	0.987 43
$h_2 = 10.5$ cm	0.066 57	0.250 79	-0.028 99	0.991 72
$h_2 = 15.5$ cm	0.029 16	0.235 10	-0.025 48	0.994 95
$h_2 = 20.5$ cm	0.006 23	0.214 86	-0.021 97	0.999 83
$h_2 = 25.5$ cm	0.003 27	0.178 24	-0.015 74	0.999 93

对于裂隙网络而言, 非线性项一般来自于裂隙表面粗糙和裂隙交叉引起的惯性效应^[21]。裂隙网络中水流沿着弯弯曲曲的途径运动, 并且在不断地改变它的运动速度、加速度和流动方向, 当变动过于剧烈时, 惯性力的影响就会导致水流的运动成为非线性渗流。

5 结 论

本文通过二维裂隙网络的稳定渗流试验, 并基于有限元软件 COMSOL Multiphysics 模拟了试验工况, 对比分析二维裂隙网络含自由面稳定渗流的特性, 得出如下结论:

(1) 模拟结果的自由面降落曲线与试验数据基本吻合, 二者自由面水头的相对误差率平均值为 5.02%, 验证了本文试验结果的有效性以及数值模拟的准确性。毛管力是二者误差的主要导致因素, 但当水流中的惯性力作用远大于表面张力的影响, 可将毛细管力忽略不计。

(2) 影响自由面变化的主要因素为上、下游水头高度以及二者的差值。渗流水力梯度越大, 自由面位置的下降越快; 渗流水力梯度相同的水力条件, 上、下游水头更高, 形成的自由面水头更高, 自由面降落曲线也更陡峭。其中, 上、下游水头对于自由面位置的影响程度有差异, 取决于二者的大小是否处于近似的水平。若上游水头远大于下游水头, 改变下游水头对自由面位置将无法构成显著影响。自由面的变化规律符合 Dupuit 公式的表述。

(3) 稳定渗流各水力条件的水力梯度与其平均流量仅在流量较小的范围内符合线性相关, 随着水力梯度的增加, 二者关系呈现为明显的非线性, 拟合表明为二次函数关系。裂隙表面粗糙和裂隙交叉导致裂隙网络中水流运动出现的惯性效应是产生非线性渗流的主要原因。

参 考 文 献

- [1] MIAO T, YU B, DUAN Y, et al. A fractal analysis of permeability for fractured rocks[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, 81: 75-80.
- [2] JAFARI A, BABADAGLI T. Estimation of equivalent fracture network permeability using fractal and statistical network properties[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2012, 92: 110-123.
- [3] 刘日成, 蒋宇静, 李树忱, 等. 交叉裂隙水力学开度的计算及非线性水力特性研究[J]. *岩土力学*, 2015, 36(6): 1581-1590.

- LIU Ri-cheng, JIANG Yu-jing, LI Shu-chen, et al. Study of nonlinear hydraulic characteristics and hydraulic aperture calculation of crossed fracture[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(6): 1581-1590.
- [4] WITTKE W. Rock mechanics: theory and applications, with case histories[M]. [S. l.]: Springer-Verlag. 1990.
- [5] 陈建生, 董海洲. 二维岩体裂隙网络渗流同位素示踪研究[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2000, 23(增刊 1): 188-192.
- CHEN Jian-sheng, DONG Hai-zhou. Study of isotope tracer method in two-dimension rock fissured network seepage[J]. **Journal of Chongqing University (Natural Science Edition)**, 2000, 23(Suppl.1): 188-192.
- [6] 汪金元, 孙役, 陈润发. 降雨入渗下的三维正交裂隙网络饱和-非饱和渗流实验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(增刊 1): 1717-1720.
- WANG Jin-yuan, SUN Yi, CHEN Run-fa. Testing study on rainfall saturated-unsaturated seepage in 3-D orthographic fracture network[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2001, 20(Suppl.1): 1717-1720.
- [7] 王恩志, 孙役, 黄远智, 等. 三维离散裂隙网络渗流模型与实验模拟[J]. 水利学报, 2002(5): 37-40.
- WANG En-zhi, SUN Yi, HUANG Yuan-zhi, et al. 3-D seepage flow model for discrete fracture network and verification experiment[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2002(5): 37-40.
- [8] JAFARI A, BABADAGLI T. A sensitivity analysis for effective parameters on 2D fracture-network permeability[J]. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, 2009, 12(3): 455-469.
- [9] 张奇华, 邬爱清. 三维任意裂隙网络渗流模型及其解法[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(4): 720-730.
- ZHANG Qi-hua, WU Ai-qing. Three-dimensional arbitrary fracture network seepage model and its solution[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(4): 720-730.
- [10] YE Z, JIANG Q, ZHOU C, et al. Numerical analysis of unsaturated seepage flow in two-dimensional fracture networks[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2016, 17(5): 132661433.
- [11] 王亚维. 基于空间网络连通性的非均质含水层渗流机理研究[D]. 贵阳: 贵州大学, 2020.
- WANG Ya-wei. Study on seepage mechanism of heterogeneous aquifer based on spatial network connectivity[D]. Guiyang: Guizhou University, 2020.
- [12] 熊峰. 裂隙岩体非线性渗流特性及水热耦合模拟研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2020.
- XIONG Feng. Study on nonlinear flow behaviors and coupled hydro-thermal simulation of fractured rock masses[D]. Wuhan: Wuhan University, 2020.
- [13] 侯晓萍, 樊恒辉. 基于 COMSOL Multiphysics 的非饱和裂隙土降雨入渗特性研究[J]. 岩土力学, 2022, 43(2): 563-572.
- HOU Xiao-ping, FAN Heng-hui. Study on rainfall infiltration characteristics of unsaturated fractured soil based on COMSOL multiphysics[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(2): 563-572.
- [14] 徐轶, 徐青. 基于 COMSOL Multiphysics 的渗流有限元分析[J]. 武汉大学学报(工学版), 2014, 47(2): 165-170.
- XU Yi, XU Qing. Finite element analysis of seepage based on COMSOL Multiphysics[J]. **Engineering Journal of Wuhan University**, 2014, 47(2): 165-170.
- [15] REN F, MA G, WANG Y, et al. Pipe network model for unconfined seepage analysis in fractured rock masses[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2016, 88: 183-196.
- [16] WEI W, JIANG Q, YE Z, et al. Equivalent fracture network model for steady seepage problems with free surfaces[J]. **Journal of Hydrology**, 2021, 603(D): 127156.
- [17] YAO C, JIANG Q, WEI W, et al. The variational inequality formulation for unconfined seepage through three-dimensional dense fracture networks[J]. **Science China (Technological Sciences)**, 2013, 56(5): 1241-1247.
- [18] LI X, LI D. A numerical procedure for unsaturated seepage analysis in rock mass containing fracture networks and drainage holes[J]. **Journal of Hydrology**, 2019, 574: 23-34.
- [19] 方达宪, 张红亚主编. 流体力学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2013.
- FANG Da-xian, ZHANG Hong-ya. Fluid mechanics[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2013.
- [20] 吴吉春, 薛禹群主编. 地下水动力学[M]. 北京: 水利水电出版社, 2009.
- WU Ji-chun, XUE Yu-qun. Groundwater dynamics[M]. Beijing: Water & Power Press, 2009.
- [21] CHERUBINI C, GIASI C I, PASTORE N. Bench scale laboratory tests to analyze non-linear flow in fractured media[J]. **Hydrology & Earth System Science**, 2012, 9(4): 2511-2522.